定在波からのクライン・ゴルドン方程式の導出

2014/04/9/修正

長井鉄也

θ の方向に向かって速度 $\vec{V}$ で移動する系　$t', \vec{r}'$　を考える。

ただし $\vec{r}' = [x', y', z']$

この系の中に非線形波動方程式の定在波解があるとする。

$E_f(t', \vec{r}')$ を定在波の電界強度とし

$$E_f(t', \vec{r}') = E_{f1}(\vec{r}') \exp(-i\omega t') \cos(\vec{k}' \bullet \vec{r}')$$

ただし $E_{f1}(\vec{r}')$ は定在波の電界強度の振幅

$\vec{k}'$ は波数ベクトルとし $\left|\vec{k}'\right| = \dfrac{\omega}{c}$ とする。

この系を静止系 $t, \vec{r}$ から見るとローレンツ変換により

$$\vec{r}' = \gamma(\vec{r} - \vec{v}t)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{v} \bullet \vec{r}}{c^2}\right)$$

ただし

$r = [x, y, z]$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$c >> v \qquad v = |\vec{v}|$

この定在波の中に1個の荷電粒子があって滞留と移動を繰り返すことでブラウン運動をしているとする。
一か所に滞留している時間に対して移動している時間が無視できるほど小さいとし
移動後に再び滞留する確率は電界強度に依存せず平等とする。

$T(\vec{r}')$ を荷電粒子の一か所一回当たりの平均滞留時間とし電界強度の振幅 $E_{f1}(\vec{r}')$ に依存して変化するとする。

a、E_{f0} を定数とし　　　$T(\vec{r}') = \dfrac{a}{\left(E_{f1}(\vec{r}') - E_{f0}\right)^2}$

であると仮定する。

$\Psi_G\ (\vec{r}')$ を複素数とし $angle(\Psi_G\ ) = -\omega t'$ とする。

$\left|\Psi_G(\vec{r}')\right|^2$ を単位体積あたりの荷電粒子の存在確率

$b(\vec{r}')$ を単位時間単位体積あたりの滞留回数とすると

$$\left|\Psi_G(\vec{r}')\right|^2 = b(\vec{r}')T(\vec{r}') = \frac{b(\vec{r}')a}{\left(E_{f1}(\vec{r}') - E_{f0}\right)^2}$$

$angle(\exp(-i\omega t')) = -\omega t'$ であるので

$$\Psi_G = \frac{\sqrt{b(\vec{r}')a}}{E_{f1}(\vec{r}') - E_{f0}} \exp(-i\omega t') = \frac{\sqrt{b(\vec{r}')a}}{E_{f1}(\vec{r}') - E_{f0}} \exp\left(i\omega\gamma\left(\frac{\vec{v}\bullet\vec{r}}{c^2} - t\right)\right)$$

定在波の中心付近で$E_{f1}(\vec{r}')$および$b(\vec{r}')$が位置に依存せずに一定とみなせる領域を考える。

この領域でΨ_Gのダランベルジャンを求めると

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi_G}{\partial t^2}+\nabla^2\Psi_G=\left(\frac{1}{c^2}\omega^2\gamma^2-\frac{\omega^2\gamma^2}{c^2}\frac{v^2}{c^2}\right)\Psi_G$$

$$=\frac{\omega^2}{c^2}\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\Psi_G=\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\Psi_G=\frac{\omega^2}{c^2}\Psi_G$$

となる。

hはプランク定数　fは振動数　mは質量とし

$$\omega=2\pi f=2\pi\frac{mc^2}{h}=\frac{mc^2}{\hbar}$$ とすると

$$\frac{\omega^2}{c^2}\Psi_G=\frac{1}{c^2}\frac{m^2c^4}{\hbar^2}\Psi_G=\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi_G$$

となるので

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi_G}{\partial t^2}+\nabla^2\Psi_G=\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi_G$$

となってクライン・ゴルドン方程式と一致する。